XAIA INVESTMENT

Die Berechnung der negativen Basis anschaulich erläutert

Jan-Frederik Mai
XAIA Investment GmbH
Sonnenstraße 19, 80331 München, Germany
jan-frederik.mai@xaia.com

Date: 28. Januar 2019

Kurzzusammenfassung

Im Artikel Mai (2019) wird im Rahmen eines idealisierten, einfachen Kreditrisiko-Bewertungsmodells eine wissenschaftlich fundierte Definition für den Begriff der *negativen Basis* eingeführt. In der vorliegenden Arbeit rekapitulieren wir die zugrunde liegende Logik noch einmal in einfach verständlicher Weise. Insbesondere demonstrieren wir die Mechanik des Modells anhand von einfachen Beispielen.

1 Einführung

Wie bereits bekannt aus einigen früheren Homepage-Artikeln, so bezeichnet man mit dem Begriff *negative Basis* die verbleibende Risikoprämie eines Anleiheinvestments, nachdem man das Zins- und Kreditrisiko der Anleihe mittels Zinsderivaten und Kreditausfallversicherungen vollständig abgesichert hat. Eine Kreditausfallversicherung (in der Folge bezeichnet mit CDS, aus dem Englischen für credit default swap) ist dabei ein Vertrag zwischen zwei Parteien, nämlich einem Versicherungskäufer und einem Versicherungsverkäufer. Der Versicherungskäufer verpflichtet sich in dem Vertrag, dem Versicherungsverkäufer eine Prämie s zu bezahlen auf ein vertraglich festgelegtes Nominal und in der Regel vierteljährlich. Falls vor Ablauf des Vertrages mit einer fixen Laufzeit T ein sogenanntes *Kreditereignis* eintritt, dann endet der Vertrag und der Versicherungskäufer erhält vom Versicherungsverkäufer eine Zahlung in Höhe von $1 - R$ mal dem Nominal, wobei die sogenannte *Verwertungsquote* $R \in [0, 1]$ in einem transparenten und standardisierten Auktionsprozess festgelegt wird. Das Kreditereignis ist vertraglich definiert und bezieht sich immer auf eine dritte Partei, die sogenannte *Referenzentität*. Diese kann zum Beispiel eine Firma oder ein Land sein, und ein typisches Kreditereignis ist ein Zahlungsversäumnis auf einer ausstehenden Anleihe der Referenzentität, aber auch zum Beispiel das Einreichen eines Insolvenzantrages.

Der Kauf von CDS-Versicherung eignet sich zum Beispiel, um ein bestehendes Kreditrisiko resultierend aus einem Anleiheinvestment zumindest teilweise abzusichern. Wenn man nur CDS-Versicherung kauft, ohne ein Anleiheinvestment zu besitzen, dann bietet ein CDS-Vertrag eine einfache Möglichkeit auf die Zahlungsunfähigkeit der Referenzentität zu spekulieren. Nicht zuletzt aufgrund dieser Tatsache wurden CDSs in den Medien im Nachgang zur Eurokrise 2011 auch einmal als “modern weapons of mass destruction” bezeichnet. Ein solcher sogenannter “naked CDS short-sell” wurde 2012 sogar von der EU verboten für den Fall, dass die Referenzentität ein EU-Staat ist, weil man die Befürchtung hat, dass ausufernde Risikoprämien auf dem CDS-Markt die Refinanzierungsfähigkeiten mancher Staaten erschweren könnten. Im Gegensatz dazu trägt der Versicherungsverkäufer aus ökonomischer Sicht ein ähnliches Risiko wie der Käufer einer Anleihe der Referenzentität, nämlich vornehmlich das Risiko

einer Verschlechterung der Kreditwürdigkeit. Allerdings gibt es auch noch Unterschiede. Zum Einen ist eine Anleihe deutlich sensitiver gegenüber Zinsänderungsrisiken als ein CDS. Zum Anderen gibt es eine Reihe eher technischer Gründe, zum Beispiel gewisse Liquiditätsaspekte und rechtliche Aspekte, welche ein Anleiheinvestment und den Verkauf von CDS-Versicherung unterscheiden. Die negative Basis stellt anschaulich eine Maßzahl dar, welche exakt diese verbleibenden Unterschiede zwischen Anleihe und CDS, nach Eliminierung des Zinsänderungsrisikos, quantifizieren soll.

Die marktübliche Definition für die negative Basis ist die Differenz aus Z-Spread der Anleihe und dem sogenannten CDS Par Spread für einen CDS mit exakter Laufzeit wie die Anleihe. Der Z-Spread ist definiert als derjenige Parallelshift einer gegebenen risikofreien Zinsdiskontkurve, welcher den Barwert aller nominellen Zahlungen aus der Anleihe mit deren beobachteten Marktpreis gleichsetzt. Er ist damit eine Maßzahl für den annualisierten Ertrag aus der Anleihe. Der CDS Par Spread gibt eine annualisierte Kennzahl für die CDS-Versicherungskosten, so dass die Idee dieser Definition auf dem Vergleich zwischen Ertrag und Kosten rührt. Allerdings muss diese Intuition als grobe Faustformel verstanden werden, welche im Allgemeinen nicht finanzmathematisch fundiert untermauert werden kann. Der Artikel Mai (2019) weist auf diese Schwäche der Methodik hin und bietet eine gut fundierte Alternative an, welche in der Folge rekapituliert und anhand zweier einfacher Beispiele demonstriert wird.

2 Definition und optimaler Hedge

Das Marktmodell in Mai (2019) beinhaltet zum einen eine Anleihe mit Laufzeit $T > 0$, Marktpreis $b > 0$, Coupon $c \geq 0$, sowie Verwertungsquote $R \in [0, 1]$ im Falle eines Kreditereignisses. Es wird der Einfachheit wegen angenommen, dass der Coupon kontinuierlich gezahlt wird. Zum Anderen setzt das Modell die Existenz von CDSs mit jeder möglichen Laufzeit $t \in [0, T]$ voraus. Der CDS mit Laufzeit t hat dabei den Preis u_t, die annualisierte Prämie $s \geq 0$, sowie dieselbe Verwertungsquote R wie die Anleihe im Falle eines Kreditereignisses. Der zufällige Eintrittszeitpunkt des Kreditereignisses wird mit τ bezeichnet, und $t \mapsto r(t)$ bezeichnet eine risikofreie Zinsrate, welche zum Diskontieren verwendet wird, also $\exp\left(-\int_0^t r(v)\,\mathrm{d}v\right)$ ist der Wert einer risikofreien Nullkuponanleihe mit Laufzeit $t \geq 0$.

Eine fundamentale Modellannahme ist die Arbitragefreiheit der beobachteten CDS-Preise u_t. Diese Annahme ist in der Praxis quasi immer erfüllt und daher keine wesentliche Einschränkung des Modells. Aus finanzmathematischer Sicht bedeutet diese Annahme, dass man für die Zufallsvariable τ eine eindeutige Verteilungsfunktion $t \mapsto F_0(t)$ finden kann, welche die Gleichung

$$\mathrm{d}u_t = e^{-\int_0^t r(y)\,\mathrm{d}y}\Big((1-R)\,\mathrm{d}F_0(t) - s\left(1 - F_0(t)\right)\mathrm{d}t\Big)$$

erfüllt. Anschaulich besagt diese Gleichung, dass der Preis des CDS (mit beliebiger Laufzeit $t \in [0, T]$) gerade gegeben ist als erwarteter Barwert aller erwarteten, aber noch von τ abhängigen Zahlungsströme, wenn man für τ die Verteilungsfunktion F_0 unterstellt. Unter dieser harmlosen Annahme zeigt der Beweis

von (Mai, 2019, Lemma 4.1), dass die Gleichung

$$b = \frac{R}{1-R}\, u_T + g_x(T) + \Big(c + \frac{s\,R}{1-R}\Big) \int_0^T g_x(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$
$$g_x(t) = e^{-\int_0^t \frac{s}{1-R} + x + r(v)\,\mathrm{d}v} \Big(1 - \int_0^t \frac{e^{-\int_0^v \frac{s}{1-R} + x + r(y)\,\mathrm{d}y}}{1-R}\,\mathrm{d}u_v\Big),$$

in der Variablen x üblicherweise exakt eine Lösung $x_* \in \mathbb{R}$ besitzt. Diese Zahl x_* wird definiert als die *negative Basis* der Anleihe. Gerechtfertigt wird diese Definition in (Mai, 2019, Corollary 4.1) durch die Tatsache, dass es eine differenzierbare Funktion $\varphi_* : [0,T) \to \mathbb{R}$ gibt, so dass ein statisches Portfolio bestehend aus

(i) einer Anleihe mit Nominal Eins,

(ii) einem CDS mit Nominal Eins und Laufzeit T,

(iii) sowie für jedes $t \in [0,T)$ einem CDS mit Laufzeit t und Nominal $\mathrm{d}\varphi_*(t)$,

vollständig risikofrei ist, und trotzdem bis mindestens τ und bestenfalls T die Rate $r(t) + x_*$ verdient. Insbesondere verdient dieses Portfolio im Falle $x_* > 0$ mehr als die risikofreie Zinsrate $r(t)$ und konstituert folglich eine Arbitragestrategie. Dabei bedeutet "vollständig risikofrei", dass das Portfolio bei einem potenziellen Kreditereignis im Falle $\tau \leq T$ weder Gewinn noch Verlust macht, sondern einfach bei seinem Wert stehenbleibt. Im Allgemeinen ist die negative Basis x_* leider nur numerisch berechenbar, dafür aber sehr effizient und akkurat. Der optimale CDS-Hedge φ_* basierend auf dem numerisch ermittelten Wert für x_* ist dann gegeben als

$$\varphi_*(t) = \int_t^T e^{-\int_t^u \frac{s}{1-R} + x_* + r(v)\,\mathrm{d}v}\, \frac{s + x_* + r(u) - c}{1-R}\,\mathrm{d}u.$$

Es gibt zwei lehrreiche Spezialfälle, in denen x_* (und damit auch φ_*) in geschlossener Form berechnet und anhand derer die Berechnungsmethodik gut verdeutlicht werden kann. Diese Spezialfälle werden im folgenden Abschnitt in den Beispielen 3.1 und 3.2 ausgeführt.

3 Beispiele

Die folgenden beiden Beispiele sind Spezialfälle, die derart konstruiert sind, dass sich x_* noch geschlossen berechnen lässt, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Beispiel 3.1 (Der Fall $u_t \equiv 0$, $r(t) \equiv r$, $b = 1$)
Wir nehmen an, dass die CDS-Kurve flach ist und zwar exakt auf dem Wert der vertraglich vereinbarten CDS-Prämie s, so dass das CDS-Upfront für jede beliebige Laufzeit exakt Null beträgt, also $u_t \equiv 0$ gilt. Zusätzlich setzen wir eine flache Zinskurve mit der Rate $r \in \mathbb{R}$ voraus. Außerdem handele die Anleihe exakt bei par, also $b = 1$. In diesem Fall kann man leicht nachrechnen, dass die eindeutige Lösung x_* der Gleichung (1) gegeben ist durch

$$x_* = c - s - r, \tag{2}$$

weil g_x wegen $\mathrm{d}u_v = 0$ in diesem Fall einfach gegeben ist durch $g_x(t) = \exp\{-[r + x + s/(1-R)]\,t\}$. Es folgt zudem unmittelbar aus (2), dass $\varphi_* \equiv 0$. Anschaulich bedeutet dies, dass der optimale CDS-Hedge gerade gegeben ist durch den Kauf eines CDS mit Laufzeit T und Nominal Eins, also ein klassisches Basispaket. Die Formel (2) besagt intuitiv, dass die negative Basis exakt der Differenz aus Anleihe- und CDS-Coupon ist, abzüglich des Finanzierungszinssatzes r. Man investiert also Anfangs exakt den Nominalbetrag in das Nominal- und Laufzeit-gematchte Basispaket, und dann erhält man bis mindestens τ oder längstens bis T den Anleihecoupon c, von welchem nach Bezahlung der CDS-Prämie s und der Finanzierungskosten r noch x_* übrig bleibt.

Beispiel 3.2 (Der Fall $u_t \equiv 0, r(t) \equiv 0, c = R = 0$)
Wir betrachten den Fall einer Nullkuponanleihe ($c = 0$) mit keinerlei Verwertungsquote im Falle eines Ausfalls ($R = 0$). Ähnlich wie bereits im vorherigen Beispiel ergibt sich mit der Annahme $u_t \equiv 0$ eine denkbar einfache Gestalt für die Gleichung (1), nämlich

$$b = e^{-(s+x)\,T},$$

welche letztlich die eindeutige Lösung

$$x_* = -\frac{\log(b)}{T} - s$$

besitzt. Interessanterweise entspricht dabei $-\log(b)/T$ exakt dem sogenannten Z-Spread der Nullkuponanleihe, so dass in diesem Spezialfall die Definition von x_* exakt übereinstimmt mit der im Markt üblichen Definition der negativen Basis, die im Allgemeinen aber nicht akkurat ist. Man rechnet leicht nach, dass der perfekte CDS-Hedge gegeben ist durch

$$\mathrm{d}\varphi_*(t) = -(s + x_*)\, e^{-(s+x_*)\,(T-t)}\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

Unter der Annahme, dass negative Basis vorliegt (also $x_* > 0$, bzw. äquivalent dazu $b < \exp(-s\,T)$), bedeutet dies intuitiv folgendes: man kauft sich nicht nur die Anleihe (zu einem Preis von b) und Nominal-gematchte CDS-Versicherung mit Laufzeit T (zu einem Preis von $u_T = 0$), sondern verkauft zusätzlich noch CDS-Versicherung mit Laufzeiten $t < T$ (zu einem Preis von jeweils $u_t = 0$), und zwar mit dem Gesamtnominal $1 - b$ und Laufzeiten verteilt über das gesamte Intervall $(0, T)$, gemäß der Formel (3). Insgesamt hat man auf diese Weise ein Basispaket geschnürt, welches initial bei $t = 0$ den Wert $b < 1$ hat und dann über die Zeit stetig monoton ansteigt bis zum Wert

$$b\left(\frac{s}{s + x_*} + \frac{x_*}{s + x_*}\, e^{(s+x_*)\,\min\{\tau,T\}}\right).$$

Dieser Wert ist in jedem Fall größer als unser intitales Investment von b, und umso größer, je später das Kreditereignis eintritt.

References

J.-F. Mai, Pricing-hedging duality for credit default swaps and the negative basis arbitrage, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 22:6 (2019).